Klausur zur Theoretischen Physik I (Mechanik) 11.06.2004

Aufgabe 1 Kräfte **schriftl., 4 Punkte**

1. Prüfen Sie ob die Kraft $\boldsymbol{F} = \alpha\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{r}$ (α konstant) konservativ ist.
2. Berechnen Sie das zur Kraft $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{r}\cos\boldsymbol{r}^2$ gehörige Potential

Lösung

1. Via Rotation:

$$\begin{aligned}[\mathbf{rot}\boldsymbol{F}]_i =& \epsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{F}_k = \alpha\ \epsilon_{ijk}\boldsymbol{\nabla}_j\epsilon_{klm}[\boldsymbol{e}_3]_l\boldsymbol{r}_m \\ =& \alpha(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})[\boldsymbol{e}_3]_l\delta_{jm} = \alpha\ (\delta_{il}3 - \delta_{il})[\boldsymbol{e}_3]_l = 2\alpha[\boldsymbol{e}_3]_i \neq 0\end{aligned} \tag{1}$$

2. Man bemerke, dass

$$\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{r}\cos\boldsymbol{r}^2 = \left(\frac{d}{dr^2}\cos\boldsymbol{r}^2\right)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{\nabla}\sin\boldsymbol{r}^2 \tag{2}$$

Potential durch radiale Integration.

Aufgabe 2 Rückschluß von Bahnkurve auf Potential in der Ebene **schriftl., 4 Punkte**

Welches Zentralpotential $V(r)$ muss auf ein Punktteilchen der Masse m wirken, damit sich als Bahnkurve eine logarithmische Spirale $r = a\,e^{b\,\varphi}$ ergibt?

1. Stellen Sie dazu zunächst die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten für ein beliebiges Zentralpotential $V(r)$ auf. Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen und lesen Sie daraus eine Erhaltungsgröße ab.
2. Berechnen Sie unter Verwendung der Bewegungsgleichungen und der Erhaltungsgröße das zur Bahnkurve $r(t) = a\,e^{b\,\varphi(t)}$ gehörige Potential $V(r)$.

Lösung

1. Die Lagrangefunktion lautet:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

Daraus erhält man die Bewegungsgleichungen:

- für r:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{dV}{dr} = 0$$

also

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -\frac{dV}{dr}$$

- für φ:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0$$

und damit also der Drehimpuls $mr^2\dot{\varphi} = L = const$ erhalten.

2. Wir haben
$$r(t) = a\, e^{b\,\varphi(t)}$$
und damit
$$\dot r = a\, e^{b\,\varphi}\, b\,\dot\varphi = r\, b\,\dot\varphi$$
$$\ddot r = a\, e^{b\,\varphi}\, b^2 \dot\varphi^2 + a\, e^{b\,\varphi}\, b\,\ddot\varphi == r\, b^2\, \dot\varphi^2 + r\, b\,\ddot\varphi$$
mit
$$m\, r^2\, \dot\varphi = L$$
erhalten wir
$$\dot\varphi = \frac{L}{m\, r^2}$$
und
$$\ddot\varphi = -\frac{2\,L\,\dot r}{m\,r^3} \underbrace{=}_{\dot r = r b \dot\varphi} -\frac{2\,L\,b\,\dot\varphi}{m\,r^2} \underbrace{=}_{\dot\varphi = \frac{L}{m\,r^2}} -\frac{2L^2 b}{m^2\,r^4}$$
Damit ist
$$\ddot r - m r \dot\varphi^2 = \frac{b^2\,L^2}{m\,r^3} - \frac{2\,L^2\,b^2}{m\,r^3} - \frac{L^2}{m\,r^3} = -(b^2+1)\frac{L^2}{m\,r^3}$$
also
$$\frac{dV}{dr} = (b^2+1)\frac{L^2}{m\,r^3}$$
$$V(r) = -(b^2+1)\frac{L^2}{2\,m\,r^2}$$

Aufgabe 3 Teilchen auf Kreiskegel, Teil 1 **schriftl., 4 Punkte**

Ein Massenpunkt der Masse m bewegt sich unter dem Einfluß konstanter Schwerkraft, parametrisiert durch die Gravitationskonstante g, auf der Oberfläche eines auf seiner Spitze stehenden Kegels (Öffnungswinkel $2\alpha < \pi$), dessen Achse parallel zur Richtung des Schwerefelds ausgerichtet ist.

1. Geben Sie die Zwangsbedingung an. Zeigen Sie, dass damit für die Lagrangefunktion L in Kugelkoordinaten die Form
$$L = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2 \sin^2\alpha) - mgr\cos\alpha$$
annimmt.

2. Wie lauten die Bewegungsgleichungen?

3. Geben Sie die Erhaltungsgrößen in Kugelkoordinaten für dieses System an. Begründen Sie Ihre Wahl.

4. Geben Sie das effektive (Radial-) Potential an. Parametrisieren Sie es mit Hilfe seines Minimums r_0. Skizzieren Sie das effektive Potential. Beschreiben Sie die Bewegung des Teilchens. Welche Bewegung entspricht dem Minimum des effektiven Potentials?

5. Entwickeln Sie das effektive Potential um sein Minimum und bestimmen Sie die Frequenz der radialen Bewegung für kleine Auslenkungen aus dem Minimum.

Lösung

1. Kugelkoordinaten mit Zwangsbed. $\vartheta = \alpha$ fest:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) \qquad \Rightarrow T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) \tag{3}$$

$$V = mgz \qquad \Rightarrow V = mgr\cos\alpha \tag{4}$$

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) - mgr\cos\alpha \tag{5}$$

2. BGLn:

$$m\ddot{r} - mr\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2 + mg\cos\alpha = 0 \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2 \dot{\varphi}^2) = 0 \tag{7}$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \tag{8}$$

Aus Gl. (7)

$$mr^2 \sin^2 \dot{\varphi}^2 = l \qquad \text{const.} \tag{9}$$

in Gl (6)

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{m^2 r^3 \sin^2 \alpha} + g\cos\alpha = 0 \tag{10}$$

3. Erhaltungsgrößen:

- Wegen Rotationssymmetrie bezügl. z-Achse: φ zykl., z-Komponente des Drehimpulses erhalten (oben l genannt)
- Setze l in L ein:

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) - mgr\cos\alpha = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2\sin^2\alpha} - mgr\cos\alpha \tag{11}$$

L hängt nicht explizit von der Zeit ab und ist homogen quadratisch in $\dot{r}$, also ist die Energie

$$E = T + V = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha \tag{12}$$

erhalten.

4. Effektives Potential

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha = mg\cos\alpha\left(\frac{l^2}{2m^2gr^2\sin^2\alpha\cos\alpha} + r\right) \tag{13}$$

Das Minimum liegt dort, wo

$$m\ddot{r} = -V'_{\text{eff}}(r) \tag{14}$$

verschwindet. Dies lesen wir also aus Gl. (10) ab:

$$0 = V'_{\text{eff}}(r_0) \Rightarrow r_0 = \left(\frac{l}{m^2 g \sin^2\alpha\cos\alpha}\right)^{1/3} \tag{15}$$

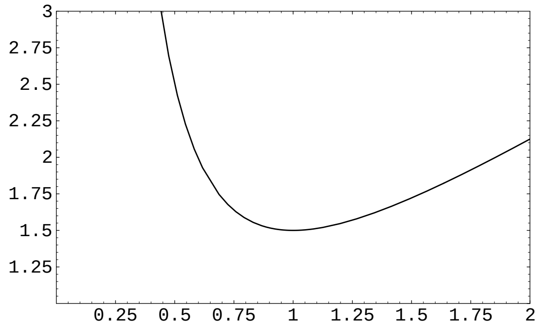
Um in V_{eff} einzusetzen lösen wir dies nach l^2 auf

$$l^2 = gm^2 r_0^3 \sin^2\alpha\cos\alpha \tag{16}$$

und setzen ein

$$V_{\text{eff}}(r) = mg\cos\alpha\left(\frac{l^2}{2m^2 g r^2 \sin^2\alpha\cos\alpha} + r\right) = mg\cos\alpha\left(\frac{r_0^3}{2r^2} + r\right) \tag{17}$$

Der Plot zeigt $\frac{V_{\text{eff}}(r)}{mg\cos\alpha}$ in Einheiten von r_0.



Für eine gegebene Energie ist die Bewegung gebunden und vollzieht sich auf einem Kegelabschnitt zwichschen den Umkehrradien r_{min} und r_{max}.

Bei r_0 ist r constant. Da mit l auch $\dot{\varphi}$ konstant ist liegt hier eine Kreisbewegung auf dem Kegel vor.

5. Taylor

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(r) &= mg\cos\alpha\left(\frac{r_0^3}{2r^2} + r\right) = mg\cos\alpha\left(\frac{3}{2}r_0 + \frac{3}{2r_0}(r-r_0)^2\right) + \dots && (18)\\ &= V_{\text{eff}}(r_0) + \frac{m}{2}\omega_r^2 (r-r_0)^2 && (19)\end{aligned}$$

also

$$mg\cos\alpha\frac{3}{2r_0} = \frac{m}{2}\omega_r^2$$
$$\omega_r = \sqrt{\frac{3g\cos\alpha}{r_0}} \tag{20}$$